

グラフのアルゴリズム―補足

神戸高専 AE1 r209211

野瀬田 裕樹

2009年12月8日(火)

1 トポロジカルソートとは

トポロジカルソート (topological sort) とは、「所定の半順序関係に矛盾しないように与えられた複数個のデータを並べ替える」ことをいう。

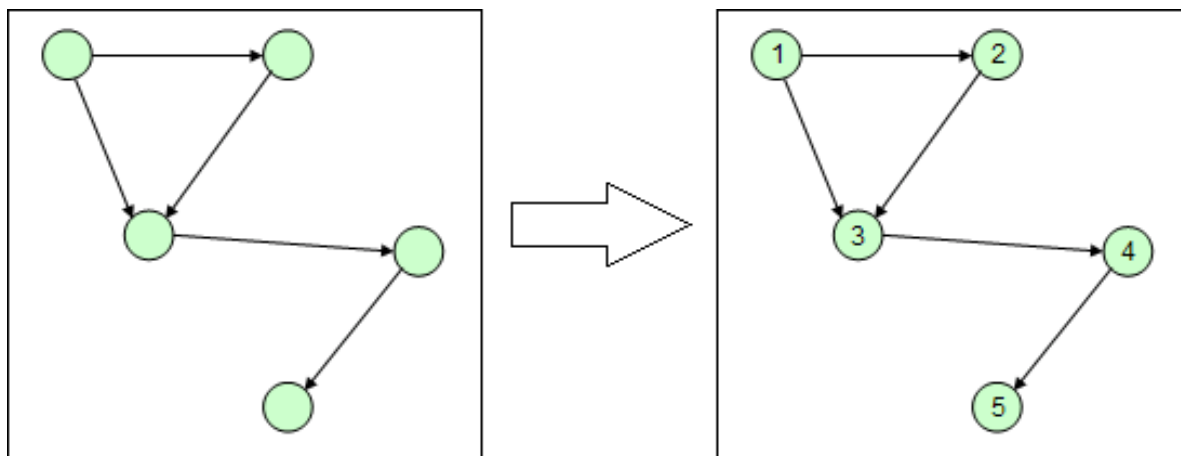


図1 トポロジカルソート

1.1 半順序関係とは

半順序関係 (partial order) とは、必ずしも比較できない場合がある順序関係のことである。これをきちんと定義すると、次のようになる。

半順序関係とは、反射律、反対称律、推移律を満たす順序関係のことである。すなわち、

- 任意の元 a に対して $a \leq a$ (反射律：自分自身とは関係が必ずある)
- $a \leq b$ かつ $b \leq a$ ならば、 $a = b$ (反対称律：違う元同士は 1 通りの関係しかない)
- $a \leq b$ かつ $b \leq c$ ならば、 $a \leq c$ (推移律：関係が推移的になっている)

が成り立つもののことである。

半順序関係は、有向グラフで表すことができる。仮に、 $a_i \leq a_j$ のとき、 i から j に向かう辺を作ることになると、「頂点 i から k への道が存在すること」と「 $a_i \leq a_k$ であること」が等価になる。

$a_i \leq a_j$ かつ $a_j \leq a_i$ が成立しないということは、グラフ上では閉路が存在しないことに対応する。

1.2 DAG とは

DAG(Directed Acyclic Graph)^{*1}とは、閉路を含まない有向グラフのことである。

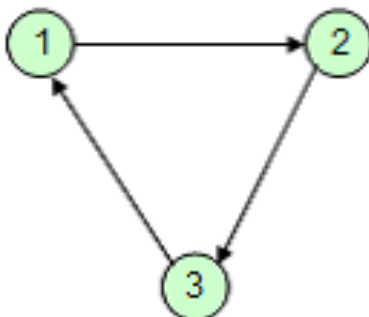


図2 DAGでないグラフ

トポロジカルソートは DAG を対象としたアルゴリズムであり，DAG でない場合はトポロジカルソートは成立しない。

2 トポロジカルソートの実現

順序関係のないデータの並べ方に自由度があるため，トポロジカルソートには一般に複数の解がありうる。しかし，そのうちの一つだけを求める場合は，グラフの深さ優先探索を行うだけでよい。

深さ優先探索を適用することで，トポロジカルソートができる理由は簡単に説明できる。ある頂点 A から，祖先へと戻る場合を考える。このときに頂点 A の番号を出力すればトポロジカルソートの逆順が得られる。なぜなら，頂点 A からの辺が向かう頂点は A より「大きい」頂点であり，A から祖先へと戻る場合は，すでに A から訪問できる頂点が訪問され，その際に番号が出力されているからである。

^{*1} DAG は日本語で無閉路有向グラフ，もしくは非循環有向グラフという。