ディジタル信号処理
(Digital Signal Processing)

神戸高専 AE1 r209211
野瀬田　裕樹

2010 年 2 月 9 日

目次

1　ディジタル信号処理における基本要素

1.1　基本の 3 要素

基本の 3 要素とは，遅延子・乗算器・加算器である．

① 遅延子：入力信号 $x(nT)$ に対してサンプリング間隔 T だけずらす．
② 乗算器：入力信号 $x(nT)$ を定数倍して出力する．
③ 加算器：2 つの信号の和を出力する．
(通常，$x(nT)$ は $x[n]$ や $x(n)$ のように T を省略して記述される)

1.2　ディジタル信号処理システムの例

問 1：$x(nT)$ はあるシステムへの入力信号であり，$y(nT)$ がその出力信号であるとする．このとき，次の出力信号 $y(nT)$ を生成するシステムを構成せよ．

(1) $y(nT) = x(nT) + 0.5x(nT - T)$
(2) $y(nT) = x(nT) + 0.5y(nT - T)$
(3) $y(nT) = ax(nT) + x(nT - T)$
(4) $y(nT) - ay(nT - T) = x(nT - T)$
(5) $y(nT) = u(nT) - u(nT - 4T)$
(なお，$u(nT)$ はステップ関数であり，$n \geq 0$ のとき 1，それ以外は 0 の関数である)

問 2：入力信号 $x(nT)$ を 3 サンプル区間平均して出力するようなシステムを構成しなさい．ただし，$x(-T) = x(-2T) = 0$ とする．

1.3　差分方程式

差分方程式はディジタル信号処理システムを表現するために用いられる記述法で，この式が定まると，入力信号が決まると出力信号が決定する．

2　z 変換

2.1　z 変換とは

フーリエ変換における微分を表す変数 $2\pi if$ を s と置いて，微分方程式の解析を行うのがラプラス変換である．これに対して，離散関数のフーリエ変換における時間シフトを表す変数 $\exp(2\pi ifnT)$ を z と置いて，差分方程式の解析を行うのが z 変換である．

アナログシステムは微分・積分を用いて表現するのでラプラス変換を用いてシステム解析を行う．一方，ディジタルシステムは差分・和分を用いて表現するので z 変換の出番となる．

2.2　z 変換の定義

離散信号 $x(nT)$ の z 変換は以下の式で定義される．

$$\mathcal{Z}[x(nT)] = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

$n < 0$ のとき $x(nT) = 0$ であれば，以下のように総和の範囲を $0 \sim \infty$ にして計算できる．

$$\mathcal{Z}[x(nT)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

2.3　z 変換の導出

連続信号 $x(t)$ をサンプリング間隔 T で離散化すると，次のようになる．

$$x_{\mathrm{samp}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

次に，$x_{\mathrm{samp}}(t)$ をラプラス変換すると，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x_{\mathrm{samp}}(t)] = X_{\mathrm{samp}}(s) &= \int_0^{\infty} x_{\mathrm{samp}}(t)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \int_0^{\infty} \delta(t - nT)e^{-st}\mathrm{d}t \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)e^{-nsT}
\end{aligned}$$

となる．ここで，$e^{sT} = z$ とおくと，

$$与式 = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)z^{-n}$$

となる（z^{-z} は遅れを表す）．これで z 変換が導出できた．

2.4　z 変換の例

以下の関数を z 変換せよ.

(1) $\delta(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$　　(2) $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$　　(3) $x(n) = n$

(1) $\delta(nT) = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(nT) z^{-n} = 1$$

(2) $u(n) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u(n) z^{-n} &= 1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots \\ &= \frac{1}{1 - z^{-1}} \quad (|z| \geq 1) \end{aligned}$$

(3) $x(n) = n$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} n z^{-n} &= z^{-1} + 2z^{-2} + 3z^{-3} + \cdots \\ &= \frac{(z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \cdots)}{1 - z^{-1}} \\ &= \frac{1}{(1 - z^{-1})^2} \quad (|z| \geq 1) \end{aligned}$$

2.5 実用的な例

入力を電圧 $x(t)$ とし，RC の直列回路の C の両端電圧を出力 $y(t)$ とすると，以下のようにラプラス変換によって解くことができる．

$$\begin{cases} Ri(t)+y(t)=x(t) \\ i(t)=C\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad RC\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+y(t)=x(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$

$$(\text{ラプラス変換すると})\quad (s+\frac{1}{CR})Y(s)=\frac{1}{CR}X(s)$$

$$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{1/CR}{s+1/CR}$$

$$(\text{逆ラプラス変換すると})\quad h(t)=\frac{1}{CR}e^{-\frac{1}{CR}t}$$

となる．これを離散時間で考えると，以下のようになる．

$$\begin{cases} x(t)\Rightarrow x(nT) \\ y(t)\Rightarrow y(nT) \end{cases}$$

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\Rightarrow\frac{y(nT)-y\{(n-1)T\}}{T}$$

$$\text{微分}\Rightarrow\text{差分}$$

これを微分方程式にあてはめると，

$$\frac{y(nT)-y\{(n-1)T\}}{T}+\frac{1}{RC}y(t)=\frac{1}{RC}x(t)$$

$$\left(\frac{1}{T}+\frac{1}{CR}\right)y(nt)=\frac{1}{T}y\{(n-1)T\}+\frac{1}{CR}x(nT)$$

$$y(nT)=\frac{CR}{CR+T}y\{(n-1)T\}+\frac{T}{CR+T}x(nT)$$

$$y(nT)=ay\{(n-1)T\}+(1-a)x(nT)\ ,\quad a=\frac{CR}{CR+T}$$

(両辺を z 変換すると)

$$\mathcal{Z}[y(nT)]=Y(z)\ ,\ \mathcal{Z}[y\{(n-1)T\}]=z^{-1}Y(z)\ ,\ \mathcal{Z}[x(nT)]=X(z)\quad \text{より}$$

$$Y(z)=\frac{1-a}{1-az^{-1}}X(z)$$

となる．ここで，$\dfrac{1}{1-az^{-1}}$ を逆 z 変換すると a^n となるので，伝達関数は $(1-a)a^n$ となる．

3　ディジタルフィルタ

3.1　FIR フィルタ

FIR フィルタ (Finit Impulse Response filter) とは，インパルス応答が有限長のフィルタであり，日本語で有限長インパルス応答ディジタルフィルタともいう．FIR フィルタの伝達関数 $H_{\mathrm{FIR}}(z)$ は一般に以下のように表される．

$$H_{\mathrm{FIR}}(z) = \sum_{k=0}^{N} h(kT) z^{-k}$$

FIR フィルタは以下のような特徴を持つ．

① 完全な直線位相特性を持つフィルタを構成することができる．　② ひずみが生じない．
③ 構成が簡単である．　④ 安定性が保証されている．

3.2　IIR フィルタ

IIR フィルタ (Infinit Impulse Response filter) とは，インパルス応答が無限長のフィルタであり，日本語で無限長インパルス応答ディジタルフィルタともいう．IIR フィルタの伝達関数 $H_{\mathrm{IIR}}(z)$ は一般に以下のように表される．

$$H_{\mathrm{IIR}}(z) = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{N} a_i z^{-i}}{1 + \displaystyle\sum_{j=0}^{L} b_j z^{-j}}$$

IIR フィルタは以下のような特徴を持つ．

① アナログフィルタ (s-z 変換) を利用することができる．
② 低次のフィルタで優れた特性を実現できる．

3.3　フィルタの例

以下の式の伝達関数を求めよ．

(1) $y(nT) = x(nT - kT)$
(2) $y(nT) = x(nT) + x(nT - 2T) + 0.25y(nT - 2T)$

3.4　システムの安定性

伝達関数の任意の極を z_p とすると，システムが安定であるためには，すべての極に対して $|z_p| < 1$ でなければならない．なぜなら，$z = e^{sT}$，$(s = \alpha + j\omega)$ のとき，$|e^{\alpha T}| < 1$，すなわち $\alpha < 0$ ならば z は収束するからである．上記の例 (2) では，$1 - 0.25z^{-2} = 0$ より，$z = \pm 0.5$ となるので安定である．

4　ディジタルフィルタの設計

4.1　直線位相特性

伝達関数 $H(e^{j\omega T})$ を考える．伝達関数が

$$H(e^{j\omega T}) = |H(e^{j\omega T})|e^{j\angle H(e^{j\omega T})}$$

と表されるとき，$|H(e^{j\omega T})|$ が振幅特性，$e^{j\angle H(e^{j\omega T})}$ が位相特性となる．位相特性が線形であるとき，直線位相特性という．これを式で表すと以下のようになる．

$$\angle H(e^{j\omega T}) = \alpha\omega T \qquad (\alpha\text{は定数})$$

4.2　FIR フィルタの設計

4.2.1　FIR フィルタ

入力を x_k，出力を y_k，フィルタ係数を h_m とすると，FIR フィルタは以下の式で定義される．

$$y_k = \sum_{m=0}^{k} h_m x_{k-m}\ , \quad H(z) = \sum_{m=0}^{M} h_m z^{-m}$$

4.2.2　FIR フィルタの周波数特性

FIR フィルタの周波数特性を求める．FIR フィルタの伝達関数 $H(e^{j\omega T})$ を実部 $H_R(e^{j\omega T})$ と虚部 $H_I(e^{j\omega T})$ に分けると以下のようになる．

$$\begin{aligned}
H(e^{j\omega T}) = H_{\mathrm{FIR}}(z)|_{z=e^{j\omega T}} &= \sum_{m=0}^{M} h_m e^{-jm\omega T} \\
&= \sum_{m=0}^{M} h_m\{\cos(m\omega T) - j\sin(m\omega T)\} \\
&= \sum_{m=0}^{M} h_m \cos(m\omega T) - j\sum_{m=0}^{M} h_m \sin(m\omega T) \\
&= H_R(e^{j\omega T}) - jH_I(e^{j\omega T})
\end{aligned}$$

このとき，FIR フィルタの位相特性は

$$\begin{aligned}
e^{j\angle H(e^{j\omega T})} &= \tan^{-1}\left\{\frac{H_I(e^{j\omega T})}{H_R(e^{j\omega T})}\right\} \\
&= \tan^{-1}\left\{\frac{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} h_m \sin(m\omega T)}{\displaystyle\sum_{m=0}^{M} h_m \cos(m\omega T)}\right\}
\end{aligned}$$

FIR フィルタを考える．

$$y(nT) = \sum_{k=0}^{n} h(nT)x(nT-kT) \qquad H(z) = \sum_{k=0}^{N} h(kT)z^{-k}$$

周波数特性

$$H(e^{j\omega T}) = \sum_{k=0}^{N} h(kT)e^{-jk\omega T} = \sum_{k=0}^{N} h(kT)(\cos k\omega T + j\sin k\omega T)$$

すなわち，周波数によって応答が異なる．ここで，

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega T}) &= |H(e^{j\omega T})|e^{j\angle H(j\omega T)} \\ e^{j\angle H(j\omega T)} &= \tan^{-1}\left[\frac{H_I(e^{j\omega T})}{H_R(e^{j\omega T})}\right] \end{aligned}$$

よって，

$$-\frac{\mathrm{d}H(e^{j\omega T})}{\mathrm{d}\omega} = \tau_0$$

となる．これが直線位相特性である．(τ は定数)

例) $f(t) = \sin(\omega_0 t) + \sin(15\omega_0 t) + \sin(20\omega_0 t)$ のとき，位相特性を $-10\omega_0$ とすると，

$$\begin{aligned} \sin(\omega_0 t) \quad &\rightarrow \quad \sin(\omega_0 t - 10\omega_0) = \sin\omega_0(t-10) \\ \sin(15\omega_0 t) \quad &\rightarrow \quad \sin(15\omega_0 t - 10\times 15\omega_0) \sin 15\omega_0(t-10) \\ \sin(20\omega_0 t) \quad &\rightarrow \quad \sin(20\omega_0 t - 10\times 20\omega_0) \sin 20\omega_0(t-10) \end{aligned}$$

4.3　s-z 変換

4.3.1　インパルス不変法

インパルス不変法は，アナログフィルタのインパルス応答を標本化してディジタルフィルタのインパルス応答を求める方法である．このような標本化によってアナログフィルタの特性を完全に近似できるためには，対象となるアナログフィルタの特性が Nyquist 周波数以下に帯域制限されていなければばならない．言い換えれば，インパルス不変法は，実現したいフィルタの振幅周波数特性が Nyquist 周波数以上で十分に減衰している場合に適切な方法である．

アナログフィルタのインパルス応答を $h_a(t)$ とする．インパルス不変法による設計では，ディジタルフィルタのインパルス応答 $h_d(n)$ が次のようになるよう設計する．

$$h_d(n) = h_a(nT_s)$$

ただし，ここで T_s は，標本化周期である．

ここで，実現したいアナログフィルタが，ラプラス変換を用いて s の有理多項式 $H_a(s)$ で表されているものとする．一般的な高次の有理多項式の場合には，次のような部分分数に展開できる．

$$H_a(s) = \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{s - s_k}$$

このラプラス変換に対応するインパルス応答 $h_a(t)$ は，次のような関数で表される．

$$h_a(t) = \sum_{k=1}^{M} A_k e^{s_k t} u(t)$$

これを $h_d(n) = h_a(nT_s)$ となるようにディジタルフィルタのインパルス応答を求めると，以下のようになる．

$$h_d(n) = \sum_{k=1}^{M} A_k e^{n s_k T_s} z^{-1}$$

この標本化されたインパルス応答を用いて z 変換を求めると，次のようになる．

$$\begin{aligned} H_d(z) &= \sum_{k=1}^{M} A_k \sum_{n=0}^{\infty} e^{n s_k T_s} z^{-n} \\ &= \sum_{k=1}^{M} \frac{A_k}{1 - e^{s_k T_s} z^{-1}} \end{aligned}$$

以前の電気回路を再び例にとると，

$$h_A(s) = \frac{1/RC}{s + 1/RC} \quad \text{なので} \quad h_D(s) = \frac{1/RC}{1 - e^{-\frac{1}{RC} T_s} z^{-1}} T_s$$

となる．なお，s 平面における収束領域は左半平面であり，z 平面の収束領域は単位円内部である．ここで，両者の周波数特性を見ると，周波数を今回は 2kHz 以下にしないと，z から s への変換はできない．

4.3.2 双一次 z 変換

双一次[*1]変換 (Bilinear transform) は連続時間領域における線型時不変フィルタの伝達関数 $H_a(s)$ (アナログフィルタ) を離散時間領域における線形シフト不変フィルタの伝達関数 $H_d(z)$ (ディジタルフィルタ) に変換するのによく用いられる等角写像のひとつである．双一次 z 変換，タスティン変換，台形差分法 (Trapezoidal method) とも呼ばれる．この変換では，s 平面上の $\mathrm{Re}[s]=0$，$j\omega$ を z 平面上の $|z|=1$ の単位円に写像する．双一次変換は元のフィルタの安定性を保存し，連続時間フィルタ $H_a(j\omega_a)$ の周波数応答のすべての点を離散時間フィルタ $H_d(e^{j\omega_d T})$ の周波数応答の対応する点に 1 対 1 に写像する．

単位インパルスによってサンプリングされた離散時間信号にラプラス変換を行うと結果は正確に z 変換として表されるが，双一次変換は以下の式に示すように z 平面から s 平面への正確な写像を行う自然対数関数の一次近似である．

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{1}{T}\ln(z) \\
&= \frac{2}{T}\left[\frac{z-1}{z+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^5 + \frac{1}{7}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^7 + \cdots\right] \\
&\approx \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1} \\
&\approx \frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}
\end{aligned}
$$

双一次変換とは，この一次近似を用い連続時間の伝達関数 $H_a(s)$ において $s \leftarrow \frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$ とし

$$
H_d(z) = H_a(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = H_a\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right)
$$

とするものである．

[*1] 双 1 次とは，分母・分子が共に 1 次であるような有理式のことを指す．